Calcul vectoriel :

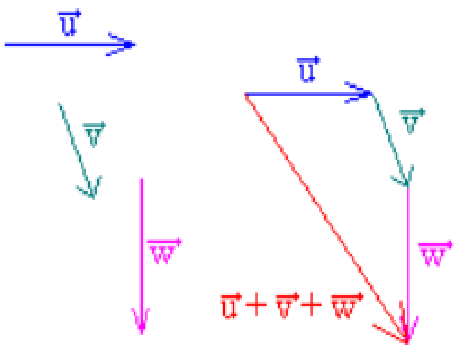
Opérations sur les vecteurs et propriétés

Addition vectorielle :

Construction :

Pour additionner deux ou plusieurs vecteurs :

- On prend un représentant du premier vecteur (un vecteur égaux)
- On prend un représentant du second vecteur dont l'origine est à placer à l'extrémité du premier vecteur , on procède ensuite de la même façon pour les autres vecteurs à ajouter.
- Le vecteur somme est le vecteur dont l'origine est l'origine du représentant du premier vecteur et l'extrémité est l'extrémité du représentant du dernier vecteur.



Relation de Chasles :

Quels que soient les points A, B, C du plan (ou de l'espace) : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$

Cette relation se généralise par exemple :

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GU} + \overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VC} = \overrightarrow{AC}$$

Propriétés de l'addition vectorielle

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$

1) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

($\vec{0}$ est l'élément neutre de l'addition vectorielle)

2) $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

(La somme de deux vecteurs opposés est le vecteur nul)

3) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

(Commutativité de l'addition vectorielle)

4) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \left(\vec{v} + \vec{w}\right)$

(Associativité de l'addition vectorielle)

Multiplication d'un vecteur par un réel :

Soit $\vec{u}$ un vecteur donné

et k un réel :

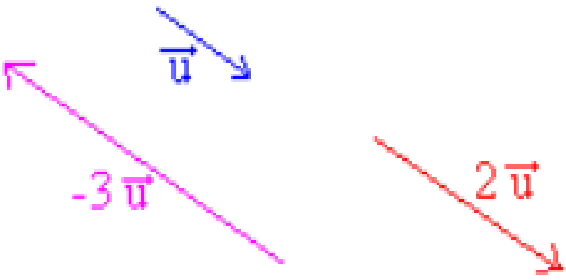
Si $k \neq 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$ le vecteur $k \cdot \vec{u}$ est le vecteur :

_de même direction que $\vec{u}$

_de même sens si $k > 0$ et de sens contraire si $k < 0$

_de norme $\|k \cdot \vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$

Si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$ alors le vecteur $k \cdot \vec{u}$ est le vecteur nul



Propriétés de la multiplication d'un vecteur par un réel.

Pour tous réels a, b et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

1) $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

2) $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

3) $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$

Définition vecteurs **colinéaires**

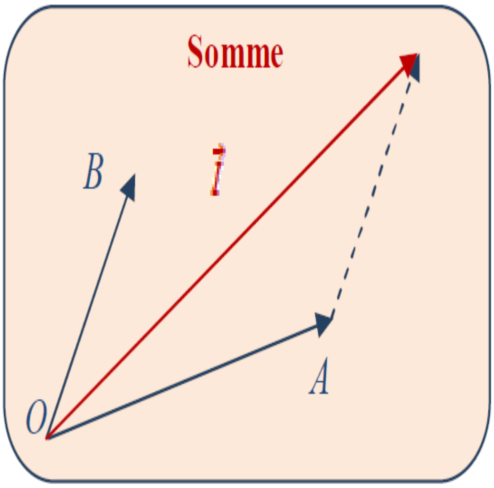
2 vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

si il existe un réel k tel que :

$\vec{v} = k\vec{u}$

Soit $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ trois vecteur de l'espace vectoriel E. avec :

$$\overrightarrow{OA} = x_A\,\vec{i} + y_A\,\vec{j} + z_A\,\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OB} = x_B\,\vec{i} + y_B\,\vec{j} + z_B\,\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OC} = x_C\,\vec{i} + y_C\,\vec{j} + z_C\,\vec{k}$$



I.3.1 Somme et multiplication par un scalaire

- La somme de deux vecteurs :

$$\vec{I} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (x_A + x_B)\vec{i} + (y_A + y_B)\vec{j} + (z_A + z_B)\,\vec{k}$$

Le vecteur $\vec{I}$ est représenté géométriquement par :
(voir figure Somme)

- La multiplication par un scalaire :

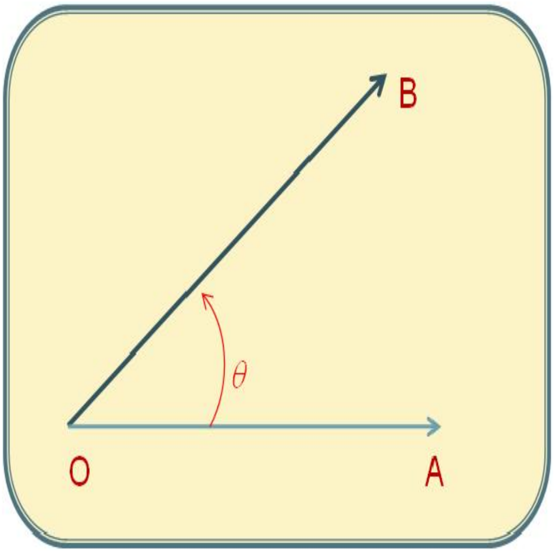
$$\forall\, \mu \in IR,\ \ \mu\,\overrightarrow{OA} = \mu x_A\,\vec{i} + \mu y_A\,\vec{j} + \mu z_A\,\vec{k}$$

Produit scalaire :

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls représentés par les bipoints *OA* et *OB* **est le nombre réel** $OA.OB.\cos(\theta)$ si l'angle θ désigne celui de *AOB*. Si l'un des vecteurs est nul alors le produit scalaire est nul.

Dans le cas où aucun des vecteurs n'est nul, cette définition prend la forme suivante :

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA * OB * \cos\theta$$



Propriétés du produit scalaire :

Commutativité :

Le produit scalaire est commutatif :

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}$ (Justification : $\cos\theta = \cos(-\theta)$)

Distributivité par rapport à l'addition :

Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition :

$$\overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$$

Conséquence :

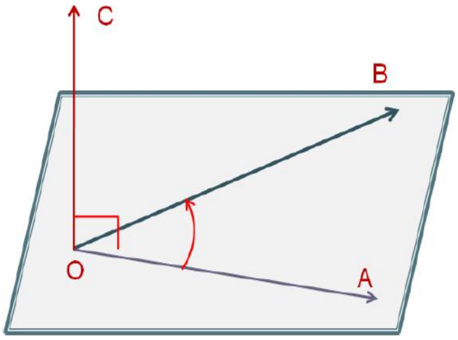
Si $\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ alors $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$

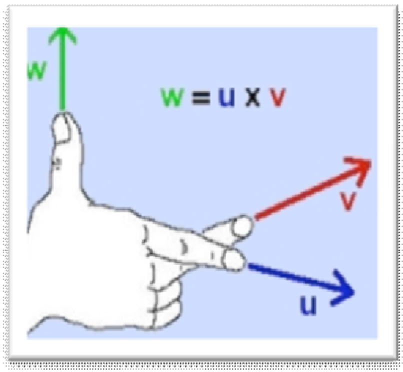
Le produit scalaire nous permet donc de déduire la perendicularité géometrique lorsqu'il est de valeur nulle.

Expression analytique :

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B$$

I.3.3 Produit vectoriel





Le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls représentés par les bipoints OA et OB est le vecteur représenté par le bipoint OC avec :

- **Un module** égale à OA.OB.sin(θ)
- **Une direction** perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs OA et OB
- **Un sens** défini par la règle de la main droite ou de la progression du tire bouchon qui envoi $\overrightarrow{OA}$ sur $\overrightarrow{OB}$. On note :

$\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\| = OA * OB * \sin\theta$

Propriétés du produit vectoriel :

Commutativité :

Le produit vectoriel est **anti**commutatif :

$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OA}$ (Justification : $\sin\theta = -\sin(-\theta)$)

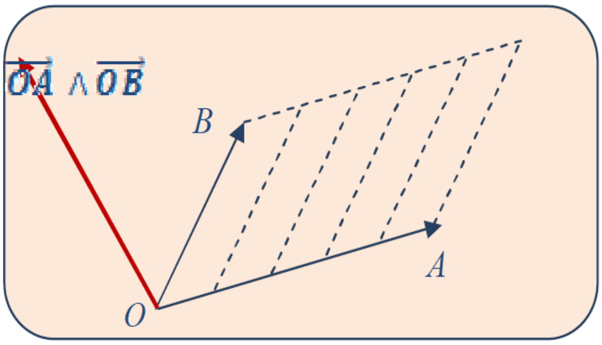
Distributivité par rapport à l'addition :

Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition :

$\overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}$

Interprétation géométrique du produit vectoriel :

Le module de $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ est donné par $OA * OB * \sin\theta$ qui représente l'aire (surface) du parallélogramme construit sur les deux vecteurs.



Conséquence :

Si $\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ alors $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OB}$

Expression analytique :

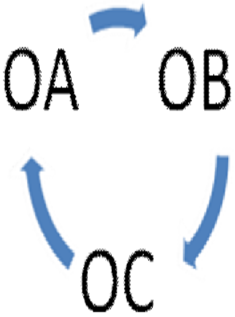
$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (y_A z_B - z_A y_B) & \vec{i} \\ -(x_A z_B - z_A x_B) & \vec{j} \\ (x_A y_B - y_A x_B) & \vec{k} \end{vmatrix}$$

(Voir exemple flèches)

I.3.4 Produit mixte

Le produit mixte de Trois vecteurs non nuls représentés par les bipoints OA et OB et OC est un scalaire ; Il est le déterminant de ces trois vecteurs dans une base orthonormale directe quelconque.

On note : $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right] = \overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}\right)$



Propriétés du produit mixte :

- $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right] = \overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{OC}.\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right) = \overrightarrow{OB}.\left(\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OA}\right)$
-

Interprétation géométrique du produit vectoriel :

Conséquence :

Expression analytique :

$$\overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}\right) = \begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ z_A & z_B & z_C \end{vmatrix}$$

I.3.5 Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel peut être calculé à l'aide de la relation suivante :

$$\overrightarrow{OA}\wedge\left(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}\right) = \left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}\right).\overrightarrow{OB} + \left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{OC}$$

I.3.6 Dérivation vectorielle

Soient M(x(t), y(t), z(t)) du repère R(O,xyz) on a :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Par définition :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Que l'on note aussi :

$$\frac{d\vec{M}}{dt}.$$

Propriétés :

- $$\frac{d}{dt}(\vec{u}+\vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \frac{d}{dt}(\vec{u}.\vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt}.\vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{u}$$
- $$\frac{d}{dt}(\vec{u}\wedge\vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt}\wedge\vec{v} + \vec{u}\wedge\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \frac{d}{dt}[\lambda(t)\vec{u}(t)] = \frac{d\lambda}{dt}\vec{u} + \lambda\frac{d\vec{u}}{dt}$$

Définition de l'opérateur $\overrightarrow{grad}$ d'une fonction :

Considérons l'espace rapporté à un repère orthonormé {O,$\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$}. Soit f(x,y,z) une fonction scalaire des trois variables x,y,z. La différentielle de f s'écrit::

Le gradient d'une fonction $f(x, y, z)$ est un vecteur qui indique la direction et le sens de croissance de la fonction f dans l'espace.

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

Univ Batna 2 **Dept GAT**

ISTU **<u>Physique I</u>** **SI 2020/2021**

TD N°1

L'espace étant muni d'un repère ortho normal R(O ;X ;Y ;Z), (i ;j ;k) dans tout se qui suit.

<u>ExerciceN^0 1</u> : Soit les vecteurs :

$$\vec{A} = -3\,\vec{i} + \frac{2}{3}\,\vec{j} - \sqrt{5}\,\vec{k}$$

$$\vec{B} = 4\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - \sqrt{2}\,\vec{k}$$

$$\vec{C} = \frac{2}{3}\,\vec{i} - \frac{3}{2}\,\vec{j} - \frac{3}{\sqrt{5}}\,\vec{k}$$

Calculer :

a- Les modules des vecteurs $\vec{A}, \vec{B}$ et $\vec{C}$.

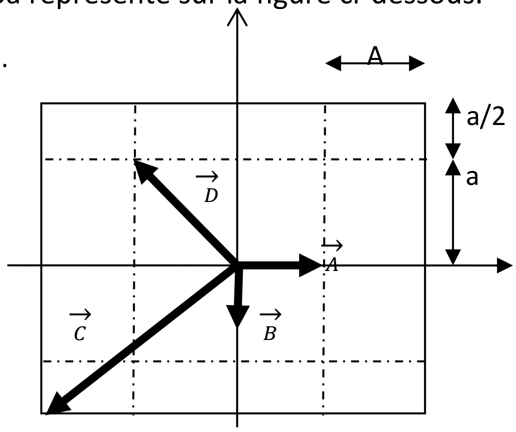
b- Le produit scalaire $\vec{A}.\vec{B}$

c- L'angle entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$

<u>ExerciceN^0 2 :</u>

On considère un rectangle de longueur 4a et de largeur 3a représenté sur la figure ci-dessous.

a- Calculer la résultante des vecteurs $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ et $\vec{D}$.



<u>ExerciceN^0 3 :</u>

Soit la fonction :

$$f(x, y, z) = -2x^2.y.z^2 + 3\sqrt{y}.\frac{x^2}{2z} + y.\sin 2y.$$

Calculer $\overrightarrow{grad}\, f$.

Univ Batna 2 **Dept GEO**

ISTU **<u>Physique I</u>** **SI 2020/2021**

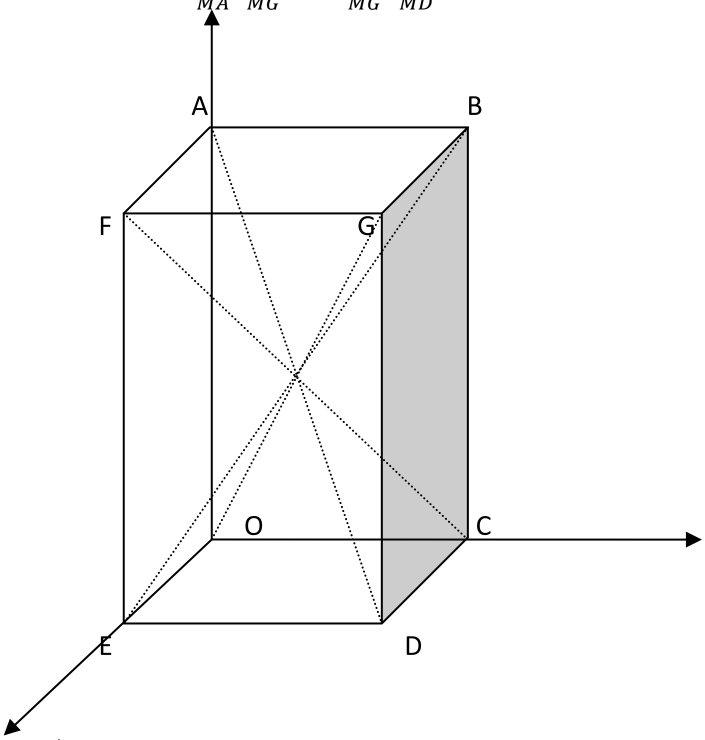
TD N°1

ExerciceN^0 1 :

La figure (1) présente une structure cristalline quadratique de paramètres de mail a

: $\vec{A} = 2\vec{\imath}, \vec{B} = 3\vec{\jmath}, \vec{C} = 4\overrightarrow{k}$. (les angles α=β= γ=90 ^{0}).

1) Donner les coordonnées des points de sommets A, B, C , D , E, F et G.
2) Calculer les composantes des vecteurs : $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{EG}$, et trouver leurs modules.
3) Montrer que $\overrightarrow{AB}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{GD}$?
4) Trouver l'angle entre les deux vecteurs $(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG})$.
5) Calculer le volume du parallélépipède.
6) Soit le point M centre du parallélépipède, trouvez ses coordonnées puis calculer les distances MA et MB.
7) Trouver l'angle entre les deux vecteurs $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MG})$ et $(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MD})$.



<u>Exercice N° 2:</u>

Soit les vecteurs $\vec{a}$et $\vec{b}$ tel que I$\vec{a}$I=3 I$\vec{b}$I=$\sqrt{2}$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$, α est l'angle entre A et B.

1) Calculer les modules des vecteurs $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ et $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$
2) Trouver l'angle β entre $\vec{C}$ et$\vec{D}$.
3) Calculer les modules des vecteurs $\vec{C} = \vec{A}$+$\vec{B}$ et $\vec{D} = \vec{A}$-$\vec{B}$. Trouver l'angle β entre $\vec{C}$ et $\vec{D}$.

<u>Exercice N°3</u>: Montrer que si les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaire alors : $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$.