Chapitre 1 : Analyse d’Erreurs

Enseignant : Dr. Noui Abdelkader

Institut des Séances de la terre et de L’univers, Université Batna 2
Batna 05078, Algérie

1. Introduction

Les cours traditionnels de mathématiques nous familiarisent avec des théories et des méthodes qui permettent de résoudre de façon *analytique* un certain nombre de problèmes. C’est le cas notamment des techniques d’intégration et de résolution d’équations algébriques ou différentielles. Bien que l’on puisse proposer plusieurs méthodes pour résoudre un problème donné, celles-ci conduisent à un même résultat, normalement exempt d’erreur.

C’est ici que l’analyse numérique se distingue des autres champs plus classiques des mathématiques. En effet, pour un problème donné, il est possible d’utiliser plusieurs techniques de résolution qui résultent en différents algorithmes. Ces algorithmes dépendent de certains paramètres qui influent sur la précision du résultat. De plus, on utilise en cours de calcul des approximations plus ou moins précises. Par exemple, on peut remplacer une dérivée par une différence finie de façon à transformer une équation différentielle en une équation algébrique. Le résultat final et son ordre de précision dépendent des choix que l’on fait.

Une partie importante de l’analyse numérique consiste donc à contenir les effets des erreurs ainsi introduites, qui proviennent de trois sources principales :

- les erreurs de modélisation ;
- les erreurs de représentation sur ordinateur ;
- les erreurs de troncature.

Les erreurs de modélisation, comme leur nom l’indique, proviennent de l’étape de mathématisation du phénomène physique auquel on s’intéresse. Cette étape consiste à faire ressortir les causes les plus déterminantes du phénomène observé et à les mettre sous forme d’équations (différentielles le plus souvent). Si le phénomène observé est très complexe, il faut simplifier et négliger ses composantes qui paraissent moins importantes ou qui rendent la résolution numérique trop difficile. C’est ce que l’on appelle les *erreurs de modélisation*.

La deuxième catégorie d’erreurs est liée à l’utilisation de l’ordinateur. En effet, la représentation sur ordinateur (généralement binaire) des nombres introduit souvent des erreurs. Même infimes au départ, ces erreurs peuvent s’accumuler lorsqu’on effectue un très grand nombre d’opérations. Par exemple, la fraction 1/3 n’a pas de représentation binaire finie, pas plus qu’elle ne possède de représentation décimale finie. On ne pourra donc pas représenter exactement cette fraction, ce qui introduit une erreur. Ces erreurs se propagent au fil des calculs et peuvent compromettre la précision des résultats.

Enfin, les *erreurs de troncature* proviennent principalement de l’utilisation du développement de Taylor, qui permet par exemple de remplacer une équation différentielle par une équation algébrique. Le développement de Taylor est le principal outil mathématique du numéricien. Il est primordial d’en maîtriser l’énoncé et ses conséquences.

2. Notion d’erreur

Soit x, un nombre, et x^*, une approximation de ce nombre. L’*erreur absolue* est définie par :

$$\Delta x = \left| x - x^* \right| \tag{1}$$

Soit x, un nombre, et x^*, une approximation de ce nombre. L’*erreur relative* est définie par :

$$E_r(x^*) = \frac{\left| x - x^* \right|}{|x|} = \frac{\Delta x}{|x|} \simeq \frac{\Delta x}{\left| x^* \right|} \tag{2}$$

De plus, en multipliant par 100 %, on obtient l*’erreur relative en pourcentage.*

En pratique, il est difficile d’évaluer les erreurs absolue et relative, car on ne connaît généralement pas la valeur exacte de x et l’on n’a que x^*. C’est pourquoi on utilise l’approximation $\Delta x/|x^*|$ pour l’erreur relative. Dans le cas de quantités mesurées expérimentalement dont on ne connaît que la valeur approximative, on dispose souvent d’une borne supérieure pour l’erreur absolue qui dépend de la précision des instruments de mesure utilisés. Cette borne est quand même appelée erreur absolue, alors qu’en fait on a :

$$\left| x - x^* \right| \leq \Delta x \tag{3}$$

ce qui peut également s’écrire :

$$x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x \tag{4}$$

et que l’on note parfois $x = x^* \pm \Delta x$. On peut interpréter ce résultat en disant que l’on a estimé la valeur exacte x à partir de $x*$ avec une incertitude de Δx de part et d’autre.

L’erreur absolue donne une mesure quantitative de l’erreur commise et l’erreur relative en mesure l’importance. Par exemple, si l’on fait usage d’un chronomètre dont la précision est de l’ordre du dixième de seconde, l’erreur absolue est bornée par 0,1 s. Mais est-ce une erreur importante ? Dans le contexte d'un marathon d'une durée approximative de 2 h 20 min, l'erreur relative liée au chronométrage est très faible :

$$\frac{0.1}{2*60*60+20*60} = 0.0000119$$

et ne devrait pas avoir de conséquence sur le classement des coureurs. Par contre, s'il s'agit d'une course de 100 m d'une durée d'environ 10 s, l'erreur relative est beaucoup plus importante :

$$\frac{0.1}{10.0} = 0.01$$

soit 1 % du temps de course. Avec une telle erreur, on ne pourra vraisemblablement pas distinguer le premier du dernier coureur. Cela nous amène à parler de précision et de *chiffres significatifs* au sens de la définition suivante.

3. Chiffres significatifs

Si l'erreur absolue vérifie :

$$\Delta x \leq 0.5*10^{m} \qquad (5)$$

alors le chiffre correspondant à la m^e puissance de 10 est dit *significatif* et tous ceux à sa gauche, correspondant aux puissances de 10 supérieures à m, le sont aussi. On arrête le compte au dernier chiffre non nul. Inversement, si un nombre est donné avec n chiffres significatifs, on commence à compter à partir du premier chiffre non nul à gauche et l'erreur absolue est inférieure à 0,5 fois la puissance de 10 correspondant au dernier chiffre significatif.

Par exemple, on obtient une approximation de π ($x = \pi$) au moyen de la quantité 22/7 ($x^* = 22/7 = 3{,}142\ 857 \cdots$). On en conclut que :

$$\Delta x = \left|\pi - \frac{22}{7}\right| = 0.00126 \ldots \cong 0.126 * 10^{-2}$$

Puisque l'erreur absolue est plus petite que $0{,}5 \times 10^{-2}$, le chiffre des centièmes est significatif et on a en tout 3 chiffres significatifs (3.14).

Si l'on retient 3.1416 comme approximation de π, on a :

$$\Delta x = |\pi - 3.1416| \cong 0.73 * 10^{-5}$$

et l'erreur absolue est inférieure à 0,5 × 10-4. Le chiffre correspondant à cette puissance de 10 (6) est significatif au sens de la définition, ainsi que tous les chiffres situés à sa gauche. Il est à remarquer que le chiffre 6 dans 3,1416 est significatif même si la quatrième décimale de π est un 5 (3,141 59 · · ·). L'approximation 3,1416 possède donc 5 chiffres significatifs.