TD N° 3

Exo 1 :

$x(t) = \left(-\frac{t^3}{3} + 4t^2 - 7t\right)$.

Mouvement Rectiligne :

$$\begin{cases} \vec{OM} = x\,\vec{i} \\ \vec{V} = \dot{x}\,\vec{i} \\ \vec{a} = \ddot{x}\,\vec{i} \end{cases}$$

pour étudier le type du mouvement on doit déterminer le signe du produit scalaire ; $\vec{a} \cdot \vec{V}$ au cours du temps.

Calcul de $\vec{V}$:

$\vec{V} = \dot{x}\,\vec{i} \Rightarrow \boxed{\dot{x} = -t^2 + 8t - 7}$

$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{i} \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = -2t + 8}$

$\vec{a} \cdot \vec{V} = (-t^2 + 8t - 7)(-2t + 8)$.

* $-2t + 8 = 0 \Rightarrow t = 4s$.
* $-t^2 + 8t - 7 = 0$ on calcule Δ :

$\Delta = 36 > 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s \\ t_2 = 7s. \end{cases}$

si $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0 \Rightarrow$ Mouvement accéléré

$\vec{a} \cdot \vec{v} < 0 \Rightarrow$ Mouvement Retardé.

$\vec{a} \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow$ En repos ou Mouvement Uniforme

t	0		1		4		7		$+\infty$
$-2t+8$		+		+	0	−		−	
$-t^2+8t-7$		−	0	+		+	0	−	
$\vec{a} \cdot \vec{V}$		−	0	+	0	−	0	+	
type de Mouvement		Retardé	0	Accéléré	0	Retardé		accéléré	

Exercice N° 3

$X(t) = \sqrt{e^{-at}}$ $\quad a > 0$

$Y(t) = \sqrt{4 - e^{-at}}$

1) Équation de la trajectoire :

$$\left.\begin{array}{l} X^2 = e^{-at} \\ Y^2 = 4 - e^{-at} \end{array}\right\} X^2 + Y^2 = 4$$

équation d'un cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon $R = 2$.

$$\boxed{X^2 + Y^2 = 2^2}$$

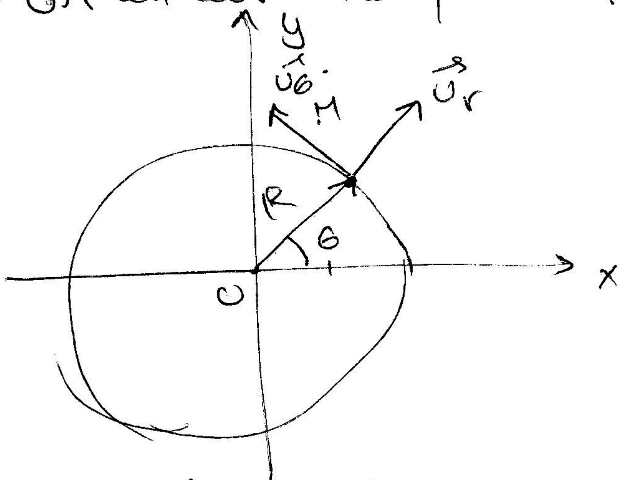
2) $\vec{V}$ à $t = 0s$:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{X} = \dfrac{-a e^{-at}}{2\sqrt{e^{-at}}} \\ \dot{Y} = \dfrac{a e^{-at}}{2\sqrt{4 - e^{-at}}} \end{array}\right\} \text{à } t=0 \quad \begin{cases} \dot{X}(0) = -\dfrac{a}{2} \\ \dot{Y}(0) = \dfrac{a}{4} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{V}(0) = -\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{4}\vec{j}}$$

Suite : Exø 3 :

3/ $\vec{OM}$ en coordonnées polaires :



en C. polaire $\vec{OM}$ s'écrit

$\vec{OM} = R\vec{U_r}$ avec R le rayon du cercle : d'où :

$$\boxed{\vec{OM} = 2\vec{U_r}}$$

4/ $\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(2\vec{U_r})}{dt}$

$\vec{V} = 2\frac{d\vec{U_r}}{dt} = 2\dot{\theta}\vec{U_\theta}$

avec $\dot{\theta} = a \Rightarrow \boxed{\vec{V} = 2a\vec{U_\theta}}$

5/ En C. intrinsèque $\vec{a}$ s'écrit

$\vec{a} = \underbrace{a_n\vec{U_n}}_{\text{Composante normale}} + \underbrace{a_t\vec{U_t}}_{\text{Composante tangentielle}}$

avec : $\begin{cases} a_t = \frac{d|\vec{V}|}{dt} \\ a_n = \frac{V^2}{R} \end{cases}$

On a : $|\vec{V}| = 2a \Rightarrow \frac{d|\vec{V}|}{dt} = 0$

$\boxed{a_t = 0}$

$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{(2a)^2}{2} = 2a^2.$

Exø 2 :

$x = x_0 \cos\omega t$

$y = y_0 \sin\omega t$

$x_0 \neq y_0$

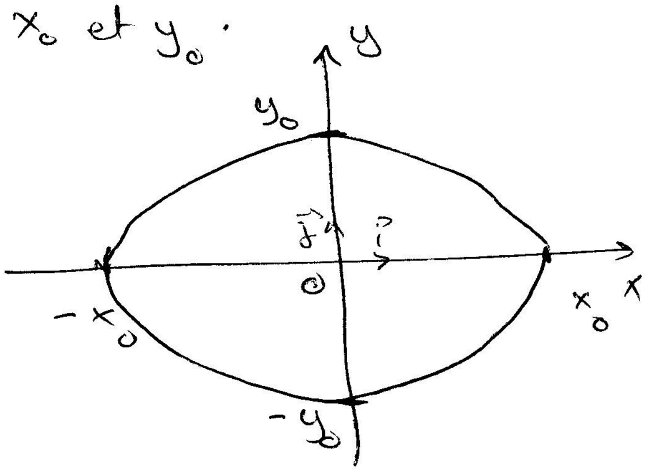
$\omega > 0.$

$\omega = 3\pi$ rd/s

a/ Trajectoire :

$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{x_0} = \cos\omega t \\ \frac{y}{y_0} = \sin\omega t. \end{array}\right\} \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 = 1.$

c'est l'équation d'une ellipse de centre (0, 0) et de rayons : x_0 et y_0.



b/ $\vec{V} = \begin{cases} \dot{x} = -\omega x_0 \sin\omega t \\ \dot{y} = \omega y_0 \cos\omega t. \end{cases}$

$\vec{a} = \begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x_0 \cos\omega t \\ \ddot{y} = -\omega^2 y_0 \sin\omega t. \end{cases}$

c/ $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$

(2) $= -\omega^2(x_0\cos\omega t)\vec{i} + \omega^2(y_0\sin\omega t)\vec{j}$

Suite EXØ 2:

c/

$$\vec{a} = -\omega^2 (x)\vec{i} - \omega^2 y \vec{j}.$$

$$= -\omega^2 \overbrace{(x\vec{i} + y\vec{j})}^{\vec{OM}}.$$

$$\boxed{\vec{a} = -\omega^2 \vec{OM}}$$

d/

$\vec{a}$ normale à la trajectoire

càd $\vec{a} \perp \vec{V}$.

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{V} = 0.$$

$$\vec{a}\begin{pmatrix} -\omega^2 x_0 \cos\omega t \\ -\omega^2 y_0 \sin\omega t \end{pmatrix} \vec{V}\begin{pmatrix} -\omega x_0 \sin\omega t \\ +\omega y_0 \cos\omega t \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow +\omega^3 x_0^2 \cos\omega t.\sin\omega t - \omega^3 y_0^2 \cos\omega t.\sin\omega t = 0$$

$$\cos\omega t.\sin\omega t (x_0^2 - y_0^2)\cdot\omega^3 = 0 \quad (1)$$

on sait que:

$\omega \neq 0$ et $x_0 \neq y_0$.

Alors. (1) $\Rightarrow \cos\omega t.\sin\omega t = 0$

Sachant que:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$.

on peut écrire:

$$\cos\omega t.\sin\omega t = \frac{\sin 2\omega t}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin 2\omega t = 0}$$

la solution de cet equation est de la forme:

$$\boxed{2\omega t = n\pi.}$$

$$t = \frac{n\pi}{2\omega} = \frac{n\pi}{2\cdot 3\pi} = \frac{n}{6}.$$

les moments où $\vec{a}$ est normale à la trajectoire sont de la forme

$$t = \frac{n}{6}.$$

* On détermine les positions X et Y:

$$\begin{cases} x = x_0 \cos\omega t = x_0 \cos 3\pi\frac{n}{6} = x_0 \cos\frac{n\pi}{2} \\ y = y_0 \sin\omega t = y_0 \sin 3\pi\frac{n}{6} = y_0 \sin\frac{n\pi}{2}. \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4
t	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
X	X_0	0	$-X_0$	0	X_0
Y	0	y_0	0	$-y_0$	0